LA GEOGRAFÍA Y EL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Tomás Fernández Ábrica
feat_777@yahoo.com.mx

Introducción

La geografía es una ciencia que, al hacer uso de las matemáticas, en este caso del cálculo diferencial e integral, se prolonga y enaltece desde el punto de vista epistemológico, por lo que entonces su relación se hace necesaria. Esta necesidad es la que nos conduce a trabajar estas dos ciencias.

Este trabajo pretende no solo utilizar al cálculo como herramienta eficaz en la resolución de problemas geográficos, sino también entrelazarlo y complementarlo con la geografía.

Ambas ciencias, geografía y matemáticas, son campo científico suficiente por si mismo para trabajar, estudiar y analizar la realidad, que es de donde proviene la verdad científica. Cualquier problema, de cualquier naturaleza, físico-matemático o social-natural, puede ser analizado a través de las matemáticas. El cálculo diferencial e integral, es una forma particular única de estudiar la realidad, pues estudia el cambio, el cual está siempre presente en la realidad natural y social que vive el hombre, ya que: “El cálculo nos permite estudiar el cambio...El cambio está en todo nuestro entorno. La temperatura exterior, la población de una ciudad, el precio de una acción, el tamaño de un tumor y la velocidad de una pelota de béisbol; todos están cambiando” (Hugues-Hallet, *et al*, 2002:1,2).

Originalmente, el cálculo fue utilizado para analizar el cambio en cantidades físicas:

"El cálculo es la herramienta matemática usada para analizar el cambio en cantidades físicas. Fue desarrollado en el siglo XVII para estudiar las cuatro mejores clases de problemas matemáticos de la época:

. Hallar la tangente de una curva en un punto.

. Hallar la longitud de una curva, el área de una región y el volumen de un sólido.

. Hallar el valor máximo o mínimo de una cantidad, por ejemplo la máxima y mínima distancia de un planeta al sol, o el máximo rango asequible para un proyectil por la variación de su ángulo de tiro.

. Dada una fórmula para la distancia recorrida por un cuerpo en una cierta cantidad de tiempo, hallar la velocidad y aceleración del cuerpo en cualquier instante. A la inversa, dada una fórmula que especifica la aceleración o velocidad en cualquier instante, hallar la distancia recorrida por el cuerpo en un periodo específico de tiempo.

Estos problemas fueron atacados por las grandiosas mentes del siglo XVII, culminando con el documento compendiado por Godofredo Guillermo Leibniz e Isaac Newton, la creación del cálculo". (Antón,1995:xxi).

Este trabajo pretende encontrar una vía en las que se conduzcan entrelazadas la geografía y las matemáticas (en este caso, el cálculo); la labor previa de ellas, en particular, ha estado presente desde que ambas ciencias se erigieron como tales, pero, casi siempre la relación entre ellas hacía ver la dependencia de una (la geografía) con respecto a la otra (las matemáticas), sobre todo por la gran utilidad que representa el uso de los números y su poderosa lógica. Es en este sentido en donde encontramos la sustanciosa correspondencia entre estas ramas del saber.

Los casos en los que se puede ver la conexión de geografía y matemáticas, son el resultado evidente y lógico producto de la anticipada investigación.

Como objetivos generales tenemos: 1) el hacer ver la indiscutible y provechosa relación entre la geografía y las matemáticas, y concretamente el cálculo diferencial e integral y 2) el establecer la enorme utilidad práctica que representa la utilización de las matemáticas en la resolución de problemas de naturaleza geográfica. Como objetivo particular: observar cómo la lógica matemática es un camino eficaz a la hora de resolver problemas geográficos; pues “Las matemáticas, como una expresión de la mente humana, reflejan la voluntad activa, la razón contemplativa y el deseo de perfección estética. Sus elementos básicos son la lógica y la intuición, el análisis y la construcción, la generalidad y la individualidad” (Courant y Robbins, 2002:17).

En la antigüedad hubo algunos geógrafos que también fueron matemáticos, sobre todo entre los griegos. Los geómetras eran geógrafos-matemáticos; Tales de Mileto (VII-VI A.C.), Pitágoras (VI A.C.), Eudoxo (405-355 A.C.), Demócrito (460-370 A.C.), Apolonio (262-180 A.C.), Arquímides (287-212 A.C.), Eratóstenes (284-192 A.C.), Ptolomeo (90-168 D.C.) y el gran compilador Euclides (III A.C.).

Tales fue precursor en cuanto a proponer la utilización de la osa mayor y la osa menor (estrellas polares) como guías para la navegación marina; asimismo fue el primero en usar los métodos de la geometría para medir las pirámides de Egipto, así como también calcular la distancia en que se encontraba un barco de la playa. Parece ser que Tales también predijo (según Jenofonte) el eclipse solar que se observó en territorio griego el 28 de mayo del año 585 A.C. Expuso también cinco teoremas geométricos (The New Enciclopaedia Británica Tomo II, 2002:670).

Aparte, Tales era filósofo, sostenía que el agua era el principio o *arké*; afirmaba también que “todo está lleno de dioses” en el sentido de que “toda la naturaleza está animada, es decir, viva” (Enciclopedia Hispánica Tomo 13, 2003:165).

Y así como Tales, también los otros tienen su reconocimiento; Pitágoras por su teorema: "En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos"; Eudoxo fue el primero que dio una explicación sistemática y geométrica de los movimientos del sol, la luna y de los planetas conocidos (Mercurio, Venus, Marte, Saturno y Júpiter), Demócrito da una exposición mecánica y material de la Tierra; Apolonio estudió las cónicas; Arquímides descubre las leyes (y sus respectivas fórmulas matemáticas) de la esfera y el cilindro, así como su famoso principio; a Eratóstenes se le reconoce por el cálculo que hizo del ecuador y de la superficie terrestre; Ptolomeo por sus sistema geocéntrico (que permaneció como verdadero un poco menos de milenio y medio), así como el establecer diversos teoremas geométricos esféricos y planos de carácter trigonométrico; y, por supuesto Euclides, que si bien recopiló toda la geometría griega de su época y del pasado, la perfeccionó y aportó ideas a ella en su famoso libro *Elementos*, el cual sirve de modelo en las concepciones espaciales de problemas matemáticos posteriores.

Mucho tiempo después René Descartes (en el siglo XVII) produce su *Geometría Analítica*, denotando una gran influencia de Ptolomeo en sus sistema de coordenadas x e y, deduciéndolas del sistema ptolemaico de localización de lugares en la superficie terrestre por medio de las coordenadas geográficas de longitud y latitud y las líneas que les corresponden, meridianos y paralelos.

Isaac Newton (1642-1727) deduce sus leyes del movimiento y de gravitación universal, en gran medida observando el movimiento y comportamiento de los astros en el espacio interestelar y, junto con Liebniz, descubre una gran arma, el cálculo diferencial e integral, la gran herramienta matemática actual utilizada en el cálculo de cambio de movimiento (y en general de cualquier tipo de cambio), así como de áreas y volúmenes que son de estricto carácter espacial y que se pueden aplicar en distintos problemas físico-matemáticos o económico-sociales, lo cual se analiza detenidamente en este trabajo.

La ley de la relatividad de Einstein(1879-1955), contendrá ya no solo la reflexión y análisis científico del espacio, sino también del tiempo; pero su fórmula matemática E=mc2 constituye en gran medida, una síntesis e interrelación de las ideas del hombre con respecto a si mismo y la intima relación que posee con la naturaleza. Esta ley adquirirá un cariz no solo estrictamente físico-matemático, sino también conceptual o filosófico.

Ningún geógrafo moderno, de Humboldt (1769-1859) hasta la actualidad, ha sido matemático. Solamente ha habido intentos y, si acaso, también se ha acercado un poco por medio de la filosofía. Un poco antes de Humboldt, Emmanuel Kant (1724-1804), el “geógrafo de la razón” según Cassirer, conceptualizó a la geografía filosóficamente, sobre todo al discurrir acerca del espacio, pero, por así decirlo, ha sido el único, después de aquella época clásica griega.

El periodo, mal llamado por cierto, de la “geografía cuantitativa” no fue un tiempo en el que la geografía y los geógrafos se ocuparon de las matemáticas como trabajo lógico y afín; simplemente se usó (y se sigue usando) a las matemáticas como una herramienta útil para resolver problemas geográficos. La “geografía cuantitativa” todavía perdura e incluso se ha acrecentado, pero, por desgracia, el trabajo de los sabios griegos y entresacado por Kant, no se ha continuado.

Lo que si se ha logrado estructurar es un procedimiento llamado Sistemas de Información Geográfica (SIG), que desde el punto de vista de las disciplinas científicas: “...tiene sus orígenes en geografía, cartografía, topografía, matemáticas y ciencias de la computación” (Raper, 2000:3), o también como dicen Buzai y Durán: “...la mayor vertiente geográfica de renovación tecnológica es la constituida por los Sistemas de Información

Geográfica (SIG), la que está al servicio de la complejidad del espacio geográfico y la resolución de problemas ambientales y territoriales. Los SIG sirven para el razonamiento geográfico, para la correlación, la comparación y para explicar relaciones causales...” (Buzai y Durán, 1997:146)

Las matemáticas, el cálculo por supuesto no es la excepción, son la expresión científica de la realidad; se estudian y analizan a través de la lógica. La geografía estudia la realidad que se da en el espacio geográfico, y lo hace también a través de la lógica, así que aquella tiene mucho de matemática en ese sentido; por lo que entonces la geografía y las matemáticas se identifican en la forma lógica de reflexionar sobre la realidad. Las matemáticas entonces, no solo son el camino lógico que usa la geografía para resolver problemas geográficos propiamente dichos, sino constituyen la identificación y empatía científicas de la geografía a la hora de resolver problemas fincados en la realidad.

Ahora bien, una forma sistemática de analizar y estudiar la realidad, es a través de los SIG; también y asimismo una forma sintética, matemática y tecnológica en la que la geografía resuelve sus problemas derivados de su propia labor de inquisición.

Desde siempre, la geografía y las matemáticas han estado íntimamente ligadas. Las matemáticas se inician en un proceso de “contar lo que había” (cuando surge la aritmética) y “medir lo que había” (cuando surge la geometría) en el espacio geográfico. Así que la geometría (medición de la tierra) junto con la aritmética son las más antiguas ramas de las matemáticas. De las dos, la que más se desarrolló al principio fue la geometría, Euclides la reúne toda ella en sus *Elementos*. La geometría se identifica con la geografía no solo porque comparte su lexema *geo*, sino por el hecho de ser una parte de las matemáticas que se encarga de medir el espacio geográfico de manera lógica y científica. La geometría produce otra rama de las matemáticas, la trigonometría (estudio del triángulo), usadas ambas, a partir de los griegos, ya no solo para medir la tierra, sino también el cielo, el espacio de los astros.

La geometría, entonces, es el punto de enlace entre las matemáticas y la geografía. De hecho, la geometría es el punto de partida, junto con la aritmética, para el desarrollo de las matemáticas, y también de alguna forma, para el desarrollo de la geografía, pues es la rama de las matemáticas que se encarga de analizar y estudiar matemáticamente al espacio geográfico en el sentido de sus magnitudes.

La geometría euclidiana dará paso a otro tipo de geometrías, por así llamarlas, como la geometría analítica, geometría descriptiva,, geometría proyectiva, etc, hasta desembocar en la topología o geometría no euclidiana. De todas ellas, las de mayor impacto en la geografía han sido la geometría analítica y la topología.

De acuerdo a World of Mathematics: "La geometría analítica es la rama de las matemáticas que utiliza ecuaciones algebraicas para describir el tamaño y posición de figuras geométricas en un sistema coordenado. Desarrollada durante el siglo XVII, se le conoce como geometría cartesiana o geometría coordenada. El uso de un sistema de coordenadas para relacionar puntos geométricos con puntos reales, es la idea central de la geometría analítica" (Narins Vol I, 2000:21).

René Descartes (1596-1650), considerado el creador de la geometría analítica, es asimismo el que introdujo el concepto de *función*, y es aquí en el concepto de *función* en donde encontramos una relación directa de las matemáticas con la geografía; pues si bien, matemáticamente una *función* representa una relación entre dos series o clases de números reales, también representa la mayoría (si no es que todos) de los fenómenos que se presentan en el mundo real del espacio geográfico. De acuerdo a ello entonces, la geometría analítica es la rama de las matemáticas que ayuda a la geografía a representar los sucesos (hechos y fenómenos) geográficos en un sistema bi o tridimensional de una manera lógica. El término función se lo debemos a Leibniz (1646-1716) y la notación y=f(x) a Euler (1707-1783).

La idea de lo que significa *función* es muy importante tanto en matemáticas como en geografía, pues esta delinea cualquier situación en la cual una cantidad variable depende de otra. Y así por ejemplo el área de un cuadrado depende de su lado, como la temperatura depende de la altitud (aunque también de la latitud).

La *función* contiene y conlleva intrínsecamente una *relación*; de hecho, matemáticamente, una *función* es una *relación*, como lo establece Petersen: "En matemáticas una *relación* se usa para representar la relación que guardan entre sí, dos números, dos variables o dos objetos. Una *relación* se escribe a menudo como un grupo de pares ordenados, o bien mediante una regla que describe como se relacionan los objetos. En matemáticas esta regla puede estar dada por una ecuación, una desigualdad o un sistema de ecuaciones y desigualdades. Una *función* es una clase especial de *relación*" (Petersen, 1997:136).

Y así entonces, por ejemplo, podemos construir una ecuación matemática en lo que respecta a que la temperatura depende de la altitud, diciendo que:

$$t=kh$$

En donde t(temperatura) es la variable dependiente, h(altitud) es la variable independiente y k es una constante; esta k tiene que ser distinta para las zonas tórrida templada y fría, y asimismo la fórmula solo es válida hasta la tropopausa.

En la estructuración matemática de la ecuación, observamos la influencia directa de la conformación física de toda la atmósfera, pues aunque la fórmula puede ser valedera de manera general para toda la atmósfera, hay que especificar para cada una de las capas de ella los valores correspondientes de *k* los cuales dependen de la oscilación de la temperatura; y también tenemos que considerar la latitud en la superficie terrestre, el cual es un factor que influye en el descenso de la temperatura desde el ecuador hacia los polos.

En atención a lo anterior entonces, la lógica matemática se tiene que afinar desde el punto de vista geográfico para poder determinar una *función geográfica* e incluso considerar los aspectos no lógicos de la ciencia que se pueden conducir por los caminos probabilísticos y topológicos(geométricos) de las matemáticas e ilimitados de la geografía, desde el punto de vista natural y desde el punto de vista social, y con mayor razón cuando estos se interrelacionan. De ambos caminos matemáticos, el topológico (geométrico) es el de mayor implicación y aplicación en geografía, por el carácter espacial o geométrico que posee, aunque sin dejar por un lado el probabilístico; pero el carácter geométrico, es no euclidiano, pues es el que trae inmerso cualquier fenómeno geográfico ilimitado.

Courant y Robbins dicen acerca de la topología:

“ A mediados del siglo XIX empezó un desarrollo completamente nuevo en geometría que pronto se convertiría en una de las grandes fuerzas de las matemáticas modernas. La nueva rama, llamada *análisis sytus* o topología, tiene como objeto de estudio las propiedades de las figuras geométricas que persisten incluso cuando las figuras son sometidas a deformaciones tan drásticas que hacen que se pierdan todas sus propiedades métricas y proyectivas” (Courant y Robbins, 2002:269).

“...A. F. Moebius (1790-1868) es el padre de la topología, le siguieron J. B. Linsting (1802-1882) el cual publicó por sugerencia de Gauss (1777-1855) el libro *Vorstudien zur Topologie* en 1847.

Cuando Riemann (1826-1866) llegó con su *Teoría de Funciones*, básico para la topología; los pioneros tales como Poincaré, se vieron forzados a apoyarse en gran medida en la intuición geométrica. Incluso hoy, un estudiante de topología se dará cuenta de que por demasiada insistencia en una forma rigurosa de presentación puede fácilmente perder de vista, en una gran cantidad de detalles formales, el contenido geométrico esencial. No obstante , es un gran mérito del trabajo reciente haber llevado a la topología al marco de las matemáticas rigurosas, en el que la intuición sigue siendo la fuente de la verdad pero no su validación final...

Aunque definitivamente la topología es una creación de los últimos cien años, antes hubo algunos descubrimientos aislados que encontraron su lugar en el desarrollo sistemático moderno. Con mucho, el más importante de esos descubrimientos es una fórmula que relaciona el número de vértices, de aristas y de caras de un poliedro simple (regular), la cual fue observada desde 1640 por Descartes y redescubierta y utilizada por Euler en 1752. El carácter típico de esta relación como teorema topológico se hizo claro mucho más tarde, después de que Poincaré reconociera la "fórmula de Euler" y sus generalizaciones como uno de los problemas centrales de la topología...

Fórmula de Euler

...Descartes y Euler descubrieron el siguiente hecho: En un poliedro simple, si V denota el número de vértices, A el número de aristas y C el número de caras entonces siempre se cumple la igualdad

$$V – A + C = 2$$

(Courant y Robbins, 2002:270)

En topología se trabaja con espacios euclidianos que se pueden tornar en no euclidianos, que en geografía bien pueden ser llamados espacios limitados que se pueden constituir en ilimitados; esto sucede tanto en fenómenos físicos como humanos, naturales como sociales. Ejemplifiquemos con un elemento del firmamento, una estrella como nuestro sol, el cual es un espacio limitado pero que genera fenómenos ilimitados como la luz, el calor y la radiación solar; a los dos últimos los podemos medir y calcular su magnitud, pero a la luz solo le podemos medir su extensión que definitivamente es de carácter topológica.

Uno de los aspectos más importantes que hay que entender en topología es la deformación de un cuerpo; por eso en el caso de nuestra estrella, el sol, es tan importante conocer su corona, la cual, al estudiarse en los eclipses de sol, nos permite conocer como ha ido variando su deformación. El sol es un elipsoide de revolución, es una figura regular, pero su superficie (representada por su corona) tiene una variación en altitud que le permite ser irregular, por lo que el radio solar varía, es decir, no siempre es el mismo. Con fines prácticos, la forma del sol es tratada como una esfera, por lo cual su estudio es todavía más simple.

En el espacio físico abundan las figuras, cuerpos y objetos regulares, pero también las irregulares, tanto "estáticas" (en reposo) como dinámicas (en movimiento); de hecho todas las figuras, cuerpos y objetos de alguna forma están en movimiento, de allí la validez de la ley de la relatividad y por ende de el cálculo diferencial e integral, ya que a través de esta rama de las matemáticas se estudian los cambios de movimiento. En topología se puede aplicar toda la matemática formal, pero asimismo la matemática teórica que como que parece que no tiene aplicación. En matemáticas, la no aplicación de algunas de sus teorías, no significa que no tenga validez científica, pues posee un profundo razonamiento lógico, lo que trae consigo ya de por sí un conocimiento puro; aunque debemos de decir que tarde que temprano a las teorías matemáticas se les encuentra aplicación.

Todo lo que se hace matemáticamente desde el punto de vista de la geografía física, lo podemos hacer también con respecto a la geografía que involucra al hombre y sus actividades.

Concluimos con respecto al cálculo, con las palabras de John Von Neumann citadas por Di Caro y Gallego:

"John Von Neumann, uno de los matemáticos más notables de este siglo en su obra *The Mathematician* ha escrito:

'El cálculo ha sido el primer logro de la matemática moderna y resulta difícil exagerar su importancia. Creo que define de forma más inequívoca que cualquier otra cosa el comienzo de la matemática actual; el análisis matemático, que es su desarrollo lógico, constituye todavía el máximo avance técnico realizado en el camino del pensamiento riguroso'

La mayoría de las cuestiones teóricas del cálculo infinitesimal pueden expresarse en términos geométricos, de modo que el cálculo y la geometría constituyen una unidad cuyo estudio es indispensable" (Di Caro y Gallego, 1999:7).

De acuerdo a esto último asegurado por Di Caro y Gallego, de que el cálculo y la geometría constituyen una unidad, es perfectamente entendible y justificable el relacionar al cálculo diferencial e integral con geografía, así como el trabajar en ello; ya que la naturaleza dinámica y cambiante de los fenómenos geográficos analizados con la lógica matemática del cambio que provee el cálculo, permite entender perfectamente el movimiento geométrico del espacio geográfico.

Con lo que respecta a los Sistemas de Información Geográfica, por ser una rama tecnológica preestablecida, posee sus límites; no sucede lo mismo con matemáticas y aún con geografía, pues estas son, como todas las ciencias , ilimitadas. Sin embargo se pueden hacer programas nuevos para resolver asimismo nuevos problemas que surjan en los distintos campos de la geografía.

Nuestra hipótesis parte del hecho de que la geografía y las matemáticas están estrechamente unidas de forma lógica, y no solo esta última es un arma de la primera. Nuestro método es el analítico y lógico, derivado estrictamente de las matemáticas, enfáticamente inductivo y la metodología será asimismo matemática.

El Cálculo Diferencial e Integral

Si alguna rama de las matemáticas merece estar en la cumbre, ese es el Cálculo Diferencial e Integral. Actualmente se le conoce también como Análisis o Análisis Real.

El Cálculo, como se le conoce de manera simple, fue aplicado por Isaac Newton al estudio del movimiento; y esta aplicación del sabio inglés, vino no solo a revolucionar la física o las matemáticas sino toda la ciencia en general. Newton, al estudiar el movimiento (sobre todo el de los planetas), se dio cuenta que este está constantemente motivado por el cambio de movimiento; y lo que primeramente fue aplicado a la física, posteriormente se vino a extender a todas las ciencias, puesto que el cálculo viene a ser la rama de las matemáticas que se encarga de estudiar la razón de cambio de diversas cantidades que se interpretan como la pendiente de la(s) curva(s) a la hora de graficar la función que representa cualquier fenómeno, ya sea estrictamente matemático (geométrico), físico, químico o de cualquier otro orden científico.

Si Newton no hubiese descubierto el cálculo, no hubiese sido posible descubrir asimismo las leyes de gravitación universal y las que rigen el movimiento de los planetas.

No obstante que fue Newton el primero que aplicó el cálculo, de manera simultánea y contemporáneamente Leibniz en Alemania descubrió el cálculo también; de hecho la notación y el nombre de cálculo se deben a Leibniz más que a Newton.

El aprovechamiento del cálculo, fue expuesto por Newton geométricamente, pero Leibniz lo hizo algebraicamente. En sí mismo, y por su significado y repercusión en la ciencia en general, lo que hizo Newton tuvo mayor significado, pues él calculó velocidades y aceleraciones en prácticamente cualquier punto de la trayectoria de un objeto en movimiento; para eso introdujo el concepto de derivada. Y así, si el movimiento de un objeto está dado por su función matemática, entonces la derivada de la función en cualquier punto, es la velocidad instantánea del objeto en el punto.

Newton imaginó calcular el promedio de velocidades más pequeñas en los intervalos más pequeños alrededor del punto.

Calcular la velocidad promedio es relativamente simple; es la distancia recorrida dividida por el tiempo en que se recorre esa distancia. Así entonces Newton definió la velocidad instantánea como el valor límite del promedio de las velocidades en los intervalos de tiempo que vienen a ser siempre más pequeños.

De forma semejante él definió la aceleración instantánea en un punto, como la razón de cambio instantánea en el punto. Así se pudo establecer la posición, velocidad y aceleración en cualquier punto de la trayectoria de un objeto en movimiento.

Newton fue también quien introdujo al mundo científico el concepto de ecuaciones diferenciales, el cual por sí mismo cambió la forma científica de describir los fenómenos naturales (y de alguna manera también los fenómenos sociales).

Una ecuación diferencial es una ecuación que contiene derivadas o razones instantáneas de cambio.

La naturaleza está llena de fenómenos cambiantes, tanto naturales como sociales, por supuesto que aquí entran los fenómenos geográficos, y las ecuaciones diferenciales están justamente hechas para describir estos fenómenos. Actualmente todas las leyes de la física están estructuradas en términos de ecuaciones diferenciales.

Podría parecer que en el cálculo, las razones de cambio constituyen todo lo que contiene, pero esto no es así, pues este también conduce a determinar las tangentes de la curvas en ciertos puntos. Esto se usa para encontrar los valores máximos y mínimos y los puntos de inflexión para una amplia variedad de funciones (que representan tanto fenómenos físicos como naturales o sociales).

La tangente es la mejor aproximación lineal a las curvas en puntos específicos. Esto vino a constituir la base para que Euler construyera su algoritmo para resolver ecuaciones diferenciales; v.gr. $F = d/dt\ G$.

Más sin embargo, el cálculo diferencial es solo la mitad de lo que constituye esta inmensamente poderosa disciplina llamada cálculo. La otra mitad se llama cálculo integral.

El cálculo integral trata con acumulaciones de razones de cambio, áreas bajo las curvas, volúmenes de sólidos, longitud de curvas, superficies de áreas y muchas más.

La integral definida es la pieza central del cálculo integral. Históricamente, la integral se desarrolla a partir de calcular el área bajo una curva en el plano.

El método de calcular el área bajo una curva lo trazó primeramente Arquímides (287-212 AC), el cual desarrolló un método para calcular aproximadamente áreas bajo parábolas. El método de Arquímides fue precursor del cálculo integral.

En el cálculo de un área bajo una curva definida por una función, uno imagina que la región bajo la curva se subdivide en tiras de rectángulos extendidas sobre el eje X de la curva. Entonces el área de un rectángulo es fácil de calcular (base por altura); si sumamos todas las áreas de las tiras, tenemos una aproximación del área bajo la curva, si esto no satisface podemos repetir el proceso una y otra vez. . El valor límite de tal proceso se define como el área bajo la curva y es un ejemplo de una integral definida.

Aun más, tanto Newton como Leibniz descubrieron lo que se conoce como el Teorema Fundamental del Cálculo, el cual esencialmente establece que la diferenciación y la integración son procesos inversos.

Ni Newton ni Leibniz imaginaron el amplio rango de aplicabilidad a que llegaría el cálculo, pues desde su invención en el siglo XVII ha sido aplicado en miles de problemas no solo en matemáticas y física, sino también en ciencias y actividades tan aparentemente alejadas de su radio de acción, como pudieran ser geografía, economía, medicina, la guerra, ecología, etc.

El Cálculo y la Geografía

Por el hecho de que la geografía es una ciencia eidética, natural y social, así como ilimitada, esto mismo le hace estar posibilitada de estudiar y analizar todo tipo de problemas; por lo que entonces está investida de un dinamismo único, como la tierra lo está en su carácter de planeta y en su carácter de mundo. Ese dinamismo de la geografía como ciencia, permite ver que los hechos y fenómenos que estudia están en constante evolución, es decir, cambian constantemente. Entonces el cambio es algo inherente a los hechos y fenómenos geográficos, ya sean naturales ya sean sociales.

El cambio o la razón de cambio; es decir, el cambio visto desde su perspectiva matemática, es tratado por la rama de las matemáticas llamada cálculo. El cambio es justamente el punto de enlace entre el cálculo y la geografía, pues los hechos y fenómenos dejan constantemente su situación y estado y se transforman en otro a macro o microescala.

Así pues que el usar cálculo para investigar hechos y fenómenos geográficos se justifica plenamente. Y se llega aún más allá, pues esto conduce a un análisis superior u óptimo, al decir de John Von Neumann de acuerdo a Stewart: “el cálculo infinitesimal fue el primer logro de las matemáticas modernas, y es difícil sobreestimar su importancia. Creo que define, más inequívocamente que nada, el comienzo de las matemáticas modernas; el sistema de análisis matemático, que es el desarrollo lógico del cálculo, todavía es el máximo avance técnico del pensamiento exacto” (Stewart, 1998: 46).

El cambio que se da en geografía lo vemos claramente en el cambio de curso de un río por la erosión hídrica, en el cambio constante de la dunas de un desierto por la acción del viento, el traslado de la capa sahariana por la erosión eólica y asimismo la acción del viento, el cambio constante de la temperatura no solo a través del día sino todos los días del año, asimismo de todos los elementos climáticos, etc, todo ello desde el punto de vista físico. Pero también sucede y con mayor razón desde el punto de vista humano o social pues el hombre es aún más dinámico que la naturaleza; cambia de gobierno, de modos de producir, de asociarse, de financiar actividades económicas, de generar riqueza, todo esto se puede analizar desde la perspectiva matemática a través del cálculo.

No obstante, en las mismas matemáticas hay diferencias en sus distintas ramas, y así: “¿En qué difieren el álgebra y el cálculo? Las palabras estática y dinámica vienen a ser las expresiones que hacen las diferencias entre las dos disciplinas. En álgebra se resuelven ecuaciones para un valor particular de una variable, una noción estática. En cálculo nos interesamos en cómo un cambio en el valor de una variable afecta la otra variable, una noción dinámica” (Barnett, et al, 2000: 129).

Entonces, el cálculo es en sí mismo dinámico, por lo que se identifica en ello con la geografía, concretamente con el modo de comportarse de los hechos y fenómenos geográficos los cuales, como ya dijimos, son dinámicos.

El dinamismo y la razón de cambio de los procesos en los que se hayan involucrados los hechos y fenómenos geográficos son material de estudio de las matemáticas, en este caso del cálculo. Y así, tomando como ejemplo el cambio de curso de un río cuya función fuera $y = x^2$, se explica con la derivada de dicha función

$$y' = 2x$$

EL CALCULO DIFERENCIAL

El cálculo diferencial es la rama del cálculo que se basa en la determinación de un límite con cierto radio. El cálculo diferencial es la parte del cálculo que trata con derivadas. La derivada de una función representa un cambio infinitesimal en la función con respecto a sus parámetros. La derivada de una función f con respecto a x se denota con $f'(x)$ o df/dx. Leibniz desarrolló la notación en 1684.

Todas las aplicaciones del cálculo diferencial conciernen con las interpretaciones de la derivada como la pendiente a la tangente en un punto específico de la curva o como la razón de cambio de la variable dependiente con respecto a la variable independiente. Al emplear cálculo diferencial se provee de un método para determinar la pendiente de una tangente a una curva, razones de cambio, puntos que se mueven en una línea recta u otra curva y máximos y mínimos absolutos.

El cálculo se usa en las ciencias físicas y biológicas, en análisis estadísticos, negocios y estudios sociales.

De manera estrictamente matemática, el cálculo se define como la determinación del límite de un cierto radio que podemos entender como el radio propiamente dicho.

De donde $f(x) = y$, donde y es la variable independiente y se define como el dominio de x, entonces $yo = f(xo)$, siendo este el valor correspondiente de y. Tenemos h y k como números reales y $yo + k = f(xo + h)$. Así que $k = f(xo + h - f(xo))$ y $k/h = [f(xo + h) - f(xo)]/h$. Este radio es la diferencia del cociente y es igual a la tangente de la curva trazada entre los puntos (xo, yo) y (xo +h, yo +k). La diferencia del cociente puede dar una idea de cómo el promedio de la razón de cambio de $y = f(x)$ con respecto a x dentro del intervalo definido. Si el límite de este radio k/h existe como h se aproxima a 0 entonces el límite se le llama la derivada de y con respecto a x, suponiendo que x = xo.

Puede también ser interpretado como la razón instantánea de cambio de y con respecto a x o xo. Las reglas y métodos desarrollados por este proceso del límite, matemáticamente permite formular varias ecuaciones que proveen un cálculo rápido de las derivadas de varias funciones. La notación de la derivada de f (x) es generalmente f′ (x). Cuando la derivada de f (x) se establece para todos los valores de x, se obtiene una nueva función la cual es en sí misma una función de x. Se puede calcular la derivada de f′ (x) y se le llama entonces la segunda derivada de y con respecto a x y su notación es f′′ (x). Las derivadas de mayor orden se expresan de la misma forma.

A Isaac Newton y Godofredo Guillermo Leibniz se les atribuye la invención del cálculo en el siglo XVII. Se les acredita la invención del mismo de manera individual así como los problemas en los que se basan para ello los cuales se han conocido a través de los años.

Los egipcios usaron cálculo para determinar el volumen de una pirámide y el área de un círculo. Los antiguos griegos emplearon cálculo para estudiar el movimiento de las estrellas y planetas antes de se conociera el cálculo formalmente. Cerca del siglo XVII los matemáticos desarrollaron métodos para determinar áreas y volúmenes de una gran variedad de formas y tamaños. Por 1720 Isaac Barrow publicó un libro en el que establecía geométricamente la relación entre problemas en los que se hallan tangentes y áreas. Esta relación es actualmente conocida como el Teorema Fundamental del Cálculo. En 1665-66 se dieron los descubrimientos de Newton de combinaciones de sumas infinitas o series infinitas, el teorema del binomio para exponentes fraccionarios y la expresión algebraica de la relación inversa entre tangentes y áreas que representaba el desarrollo de métodos que se usan en cálculo. Newton se mostró renuente a publicar sus descubrimientos, por lo que Leibniz publicó primero el cálculo diferencial en 1684. Mientras Leibniz publicaba sus métodos de cálculo independientemente de Newton, este lo hacía mucho más tarde, por lo que les reconoce a ambos como codescubridores del cálculo. Leibniz también remplazó los símbolos de Newton en el cálculo diferencial con los que actualmente se usan. El cálculo se usa en ciencias físicas para estudiar la velocidad de los objetos en caída libre, las razones de cambio en una reacción química y el grado de descomposición de un material radiactivo. Las ciencias biológicas emplean cálculo para estudiar problemas como la razón de crecimiento de una colonia de bacterias en función del tiempo. Las ciencias sociales usan cálculo para estudiar problemas concernientes a la población desde el punto de vista de la probabilidad y estadística.

Cálculo Integral

El cálculo integral trata del análisis del cálculo de área bajo la curvas, así como también el estudio de líneas y superficies totales en dos y tres dimensiones. En los niveles básicos, cuando se encuentran las áreas bajo las curvas, las integrales pueden ser el camino contrario de las derivadas , de donde obtiene su otro nombre, antiderivadas.

Hay dos tipos de integrales en un nivel básico: la integral definida y la integral indefinida. La integral definida provee de un rango numérico bajo el cual la integral se calcula; la integral indefinida es vista como una forma cerrad de solución en la cual cualquier rango se puede aplicar.

El cálculo integral se usa frecuentemente en conjunción con las ecuaciones diferenciales. Una ecuación diferencial estará, como su nombre lo indica, proveyendo información acerca de la razón de cambio de una función en su forma diferencial. El proceso de resolver la ecuación generalmente resulta con una ecuación que a su vez posee una integral en cada lado. Estas integrales unidimensionales se resuelven con una variedad de métodos directos, numéricos y de series.

Un cambio a dos o tres dimensiones en una integral, trabajará como si encajara en problemas sin conexión tan grandemente como la variable sobre la cual se integra y no es esta un vector. Sin embargo, hay algunas situaciones en la cual la dirección es importante. La ruta de las integrales pueden resolverse en superficie de dos o tres dimensiones, pero la dirección de la integración es importante, en tanto que la razón de cambio (la diferencial dentro de la integral) puede variar de acuerdo a como uno se mueve de un punto A a uno B. De donde entonces se puede se puede especificar un camino de integración. La superficie de las integrales generaliza a tres dimensiones y trata con una o con las tres, así pues que la dirección de la integración y la dirección perpendicular son ambas importantes cuando se calculan estas integrales.

Los mejores estudios dentro del cálculo integral tienen uso tanto en el mundo de la física como en la teoría matemática. El estudio de las variables complejas requiere una base firme en conocimiento de cálculo integral, las ciencias físicas también usan aquellas con sus formas cerradas antidiferenciales y el cálculo de resultados acumulativos de áreas totales en su forma definida. El cálculo integral provee a ambas (a la física y a la matemática propiamente dicha) de una prueba de resultados experimentales y un camino para formular nuevas teorías. A la hora de computar, el lado numérico del cálculo integral es más importante para entender la mayoría de los cálculos internos; pero la disciplina completa es vital para los sucesos de la teoría de cómputo. En matemáticas, sus principios y habilidades asociadas se asumen, tanto cuando se usan como cuando no se usan estos de manera directa.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOGRAFICOS POR MEDIO DE CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Ya habíamos dejado asentado que el cálculo es la herramienta más eficaz de las matemáticas para resolver todo tipo de problemas; sobre todo porque involucra el análisis del cambio en cualquier tipo de movimiento, y cómo el cambio es un proceso que está inmerso en prácticamente todo hecho o fenómeno natural, social o incluso abstracto y asi mismo en cualquier tipo de escala y bajo cualquier condición dinámica o estática (prácticamente todos son dinámicos). Por lo que entonces, ante la pretensión científica excepcional del cálculo, la geografía adquiere su derecho y toma su papel matemático correspondiente; y así:

"...el formalismo matemático del cálculo, que a primera vista es abstracto y alejado de la realidad, se relaciona con diseños de razonamiento que usa la gente en general... v.gr.

Ejemplo 1: La sensibilidad. La dirección de las ruedas delanteras de un automóvil se determina por medio de un volante (y en ello siempre hay un cambio en la dirección). Cuando $x = 1.0$ grados y $y = 0.001$ grados. Y es 1/100 de x, decimos que la dirección de las ruedas es ligeramente sensible a la dirección del volante.

Ejemplo 2: El coeficiente de dilatación. La sensibilidad de una barra de hierro a la temperatura x/ y = Coeficiente de Dilatación, y es la razón de cambio de y (longitud de la barra) entre x (temperatura en grados centígrados).

Ejemplo 3: Análisis marginal de la economía $y/ x =$ y es costo de producción, x es tasa de producción.

Ejemplo 4: El gradiente de temperatura $x/ y = t/ h$.

Ejemplo 5: El gradiente de un camino h / x.

Ejemplo 6: La pendiente a la tangente de una curva y/ x.

Ejemplo 7: La velocidad de una partícula que se mueve en línea recta x/ t.

Ejemplo 8: La rapidez de variación

> Rapidez instantánea de variación = límite del promedio de la rapidez de variación cuando la longitud del intervalo tiende a cero”.
>
> (Kaplan y Lewis, 1978: 185-190)

Y también: “El cálculo nos permite estudiar el cambio...

Las funciones son verdaderamente fundamentales para las matemáticas. En nuestro lenguaje diario decimos: ‘el rendimiento del mercado de acciones es una función de la confianza del consumidor’, o bien ‘la presión sanguínea del paciente es una función de los medicamentos prescritos’. En cada caso, la palabra función expresa la idea de que el conocimiento de un dato nos dice otro. En matemáticas, las funciones más importantes son aquellas en las que el conocimiento de un número nos indica otro número. Si conocemos la longitud del lado de un cuadrado, podemos determinar su área. Si se conoce la circunferencia de un círculo, se puede determinar su radio”. (Hugues-Hallet, *et al*,2002:1)

¿Cómo se calcula el cambio en un movimiento de acuerdo al cálculo?; de la manera siguiente:

Cambio en una cantidad y entre el tiempo a y b = valor de la cantidad en el tiempo b – valor de la cantidad en el tiempo a = y

Promedio de rapidez de cambio de una cantidad y entre el tiempo a y el b = cambio en cantidad / cambio en tiempo = y / t (cociente de diferencia).

Pero aún más: “El cálculo es la matemática del cambio, y la principal herramienta para estudiar las razones de cambio es un proceso denominado derivación”. (Hoffman y Bradley,2001:98)

En el cálculo, y en general en todas las matemáticas, el concepto de *función* es básico para entender precisamente las razones de cambio; ya que es la *función* misma la que cambia al cambiar el fenómeno a analizar o estudiar. Y a eso justamente es a lo que se refieren Hoffman y Bradley en cuanto a la derivación, pues cuando una *función* se deriva, esta ya no es la misma y representa la acción cambiante de un fenómeno en esa *función*, justamente la “razón de cambio”. Pero la *función* en sí representa el arma matemática fundamental, pues es el punto de partida para discutir los cambios que sufre un determinado fenómeno cualquiera que este sea y cualquiera que sea su naturaleza.

Veamos un ejemplo de aplicación de *función* de manera directa:

Problema

La presión del agua en la base de una presa es una función de la profundidad del agua. La densidad del peso del agua es de 30.5 kg/m3. De esta manera la presión del agua P debajo de la superficie del agua es de P (d) = 30.5 d (esta es la *función*), donde d representa la profundidad del agua en pies. ¿Cuál es la presión sobre un buzo que está a 90 pies de profundidad?

P (d) = 30.5 kg/m3 d = 30.5 kg/m3 . 90 pies = 2745.0 kg/m2

Aplicación de *función exponencial* en demografía:

Problema 1

En 1995 la población mundial estaba creciendo a una razón aproximada del 1.8 % anual. Esto puede expresarse matemáticamente como P = Po(1.018)t, donde Po = 5.7 . 10 9 y P es la población t años después de 1995.

a) ¿Cuál será la población mundial aproximada en el 2000?

b) ¿Cuál será la población mundial aproximada en el 2050?

c) ¿En qué año la población mundial llegará a los 10 000 000 000 (10 9)?

Respuestas:

a) P = Po (1.018) t

= 5.7 . 10 9 . (1.018) 5

= 5.7 . 10 9 . 1.093 = 6.2301 . 10 9 hab

b) P = Po (1.018) t

= 5.7 . 10 9 . (1.018) 55

= 5.7 . 10 9 . 2.667 = 15.2019 . 10 9 hab

c) P = Po (1.018) t

10 10 = 5.7 . 10 9 (1.018) t

(1.018) t = 10 10/ 5.7 . 10 9 = 1.754

t = log 1.754/ log 1.018

t = 34.85

t = 35 años

Problema 2

La liberación de los clorofluorcarbonos, que se usan en los acondicionadores de cabello y, en menor grado, en los aerosoles domésticos (para el cabello, crema de rasurar, etc,) destruye el ozono de la atmósfera superior. En la actualidad la cantidad de ozono, Q, está disminuyendo a una tasa continua de 0.25 % anual. ¿Cuál es la vida media del ozono? En otras palabras, con esta rapidez, ¿Cuánto tiempo tardará en desaparecer la mitad del ozono?

Si Qo es la cantidad inicial del ozono, entonces:

$Q = Qo\ e^{-0.0025t}$

Se desea calcular T, que es el valor de t que hace que $Q = Qo/2$, y así:

$Qo\ e^{-0.0025t} = Qo/2$

Dividiendo entre Qo y sacando logaritmos naturales

$\ln(e^{-0.0025t}) = -0.0025T = \ln(1/2) = -0.6931$

$T = -0.6931/-0.0025 = 277$ años

(Hugues-Hallet, 2002:47-48)

Aplicación de *derivadas*

Problema 3

Un estudio ambiental de cierta comunidad suburbana indica que el nivel medio diario de monóxido de carbono en el aire será $c(p) = (0.5p^2 + 17)^{½}$ partes por millón (ppm) cuando la población es p miles. Se estima que dentro de t años la población de la comunidad será $p(t) = 3.1 + 0.t^2$ miles. ¿A qué razón cambiará el nivel de monóxido de carbono respecto al tiempo dentro de 3 años?

El objetivo es hallar dc/dt cuando t = 3. Como:

$Dc/dp = ½ (0.5p^2 +17)^{-1/2} [0.5(2p)] = 1/2p (0.5p^2 +17)^{-1/2}$

Y $dp/dt = 0.2t$

De la regla de la cadena se deduce que

$Dc/dt = dc/dp \cdot dp/dt = 1/2p(0.5p^2 + 17)^{-1/2} (0.2t) = 0.1pt/(.5p^2 +17)^{-1/2}$

Cuando t = 3

$P(3) = 3.1 + 0.1 (3)^2 = 4$

Y por tanto $dc/dt = 0.1 (4) (3) / (0.5 (4)^2 +17)^{½}$

$= 1.2/(25)^{½} = 1.2/5 = 0.34$ ppm

(Hoffmann, 2001:155-156)

Problema 4

El Producto Interno Bruto (PIB) de cierto país era N (t) = t2 +5t +106 mil millones de dólares t años después de 1990.

a) ¿A qué razón cambió el PIB respecto al tiempo en 1998?

b) ¿A qué razón porcentual cambió el PIB respecto al tiempo en 1998?

Respuestas

a) La razón de cambio del PIB es la derivada de N (t)

N' (t) = 2t +5, sustituyendo t = 8 2(8) +5 = 21

Es decir, la razón de cambio es de 21 mil millones de dólares por año

b) La razón del cambio porcentual del PIB en 1998 fue

100 N'(8)/N (8) = 100 (21/210) = 10% por año

(Hoffmann, 2001:113-114).

Aplicación de *integración*

Problema 5

Calcular la edad promedio de la población de los Estados Unidos, dada la función de densidad.

La fórmula de p es:

$$P(t) = \begin{cases} 0.015 & \text{para } 0 < t < 40 \\ 0.0262-0.00028t & \text{para } 40 < t < 93.3 \end{cases}$$

Partiendo de ella calculamos

Edad promedio t (p(t))dt = t(0.015)dt + t(0.0262-0.00028)dt

= 0.015 t2/2 + 0.0262 t2/2 + 0.00028 t3/3 = 35 años

(Hugues-Hallet, 2002:479)

Problema 6

En cierta fábrica, la producción está dada por la función producción de Cobb-Douglas:

Q (K,L) = 50K 3/5 L 2/5

Donde K es la inversión de capital en unidades de $1 000 y L es el tamaño de la fuerza laboral en horas-trabajador. Suponga que la inversión mensual de capital varía entre $10 000 y $12 000, mientras que el uso mensual de mano de obra varía entre 2 800 y 3 200 horas-trabajador. Halle la producción mensual de la fábrica.

Es razonable estimar la producción mensual por el valor medio de Q (K,L) sobre la región rectangular R: 10 < K < 12, 2 800 < L < 3 200. La región tiene un área:

A = área de R = (12-10) . (3 200- 2 800), entonces la producción media es

VM = 1/800 50K 3/5 L 2/5 dA

= 1/800 (50K 3/5 L 2/5 dA) dL

= 1/800 50L 2/5 (5/8 K 8/5) dL

= 1/800 (50 (5/8)) L 2/5 (12 8/5- 10 8/5) dL

= 1/800 (50) (5/8) (12 8/5-10 8/5) (5/7 L 7/5)

= 1/800 (50) (5/8) (5/7) (12 8/5- 10 8/5) [(3200 7/5) – (2800 7/5)]

La producción media mensual es de

= 5 181.23, es decir 5 181 unidades

(Hoffmann, 2001:574).

Aplicación de *límites*

Problema 7

Suponer que f (t) mide el nivel de oxígeno de un estanque donde f (t) es el nivel normal y el tiempo t se mide en semanas. Cuando t = 0, el desecho orgánico se vacía en el recipiente así como también la pérdida de material por oxidación. El nivel de oxígeno en el recipiente es:

$$f(t) = t2 - t + 1/t2 + 1$$

¿Qué porcentaje del nivel normal de oxígeno existe en el recipiente después de 1 semana? ¿Después de 2 semanas? ¿Después de 10 semanas? ¿Cuál es el límite de t que se aprovecha infinitamente?

Solución

Cuando t = 1, 2,...10, los niveles de oxígeno son:

$f(1) = 1\ 2 - 1 + 1/\ 1\ 2 + 1 = ½ = 50\%$ 1 semana

$f(2) = 2\ 2 - 2 + 1 /\ 2\ 2 + 1 = 3/5 = 60\%$ 2 semanas

$f(10) = 10\ 2 - 10 + 1/10\ 2 + 1 = 91/101 = 90.1\%$ 10 semanas

Para obtener el límite de aprovechamiento al infinito, se divide el numerador y el denominador por t2.

$\lim t2 - t + 1/t2 + 1 = \lim 1 - (1/t) + (1/t2)/1 + (1/t2) = 1 - 0 + 0/1 + 0 = 1 = 100\%$ (Larson, 2002:197).

Aplicación de *ecuaciones diferenciales*

Problema 8

La razón de cambio del número de coyotes, N (t), en una población es directamente proporcional a 650-N (t), donde t es el tiempo en años. Cuando t = 0, la población es 300, y cuando t = 2, la población se incrementa en 500. Hallar la población cuando t = 3.

Solución

Porque la razón de cambio de la población es proporcional a 650- N (t), se puede escribir la ecuación diferencial

$dn/dt = k (650- N)$

Se puede resolver esta ecuación usando separación de variables

$dN = k (650-N) dt$

$dN/650-N = kdt$

$-\ln 650-N = kt + C1$

$\ln 650-N = -kt - C1$

$650-N = e^{-k-C1}$

$N = 650 - Ce^{-kt}$

Usando N = 300 cuando t = 0, podemos decir que C = 350, la cual produce

$N = 650 - 350e^{-kt}$

Entonces usando N = 500 cuando t = 2, hallamos que

$500 = 650 - 350e^{-2k} \quad e^{-2k} = 3/7 \quad k = 0.4236$

Así que el modelo para la población de coyotes es

$N = 650 - 350e^{-0.4236t}$

Cuando t = 3

$N = 650 - 350e^{-0.4236 (3)} = 552$ coyotes

(Larson, 2002:197).

El cambio, con su razón de cambio correspondiente, es un proceso constante en la naturaleza; está presente prácticamente en todos los hechos y fenómenos que se presentan en el cosmos. Los hechos y fenómenos geográficos son solo una parte de ellos, pero como estos son los que mayormente repercuten en la vida económica y social del ser humano, son por lo mismo los más significativos. El cambio está siempre presente en los hechos y fenómenos geográficos; por lo mismo estudiar, analizar, razonar, discurrir y discutir sobre ellos matemáticamente, se hace no solo interesante, sino necesario. En este caso, la lógica del cálculo te conduce a todos los rincones por razonar del hecho o fenómeno, y entonces el resultado científico que da como producto es de mayor provecho y plausibilidad, no solo desde el punto de vista científico propiamente dicho, sino en su aplicación práctica.

Ecuaciones Diferenciales

Una ecuación diferencial es una relación matemática la cual contiene una o más derivadas de una función. L a solución de la ecuación diferencial es la ecuación original. Esta ecuaciones se usan frecuentemente en aplicaciones científicas, particularmente en Física e Ingeniería, porque ellas expresan razones de cambio en cantidades de interés tales como posición, temperatura y otros parámetros físicos. Estas ecuaciones se consideran como una extensión del estudio básico del Cálculo.

Las ecuaciones diferenciales se clasifican de varias formas. El orden de una ecuación diferencial se da por el mayor número de derivadas de una función que se muestran en la ecuación, entonces, una ecuación que ofrece tres derivadas de una función sería una ecuación diferencial de tercer orden, pero una ecuación diferencial que muestra tanto la tercera como la cuarta derivada sería una ecuación de cuarto orden..

Las ecuaciones diferenciales que más se usan en aplicaciones prácticas son ecuaciones diferenciales de primero o segundo orden, ya que hay muy pocas razones de cambio de tercer orden que se usan en tópicos físicos. Sin embargo las ecuaciones de mayor orden aparecen y se usan en estudios teóricos más profundos.

Las ecuaciones diferenciales también se dividen en categorías ordinarias y parciales. Las ecuaciones diferenciales ordinarias solo muestran derivadas ordinarias, mientras que las ecuaciones diferenciales parciales involucran derivadas parciales. En el caso de las ecuaciones diferenciales parciales, las derivadas parciales pueden estar en más de una variable. A menudo las ecuaciones diferenciales aparecerán con derivadas parciales en todas direcciones y tiempo espaciales.

Linealmente es otro camino para clasificar ecuaciones diferenciales. Si una ecuación diferencial es lineal, esta no muestra el producto o cualquier otra combinación aditiva de derivada de diferente orden; esto es, una ecuación diferencial lineal no mostrará un término como yy’, pero si y + y’ el cual es aceptable linealmente.

Las ecuaciones diferenciales no lineales son generalmente mucho más difíciles de resolver, porque no pueden ser separadas en componentes diferenciales y no diferenciales tan fácilmente.

Pueden presentarse sistemas de ecuaciones diferenciales con más de una función desconocida. Estas contienen más de una función desconocida en forma diferenciable, en cualquier nivel de derivación. Así como con los sistemas de ecuaciones lineales, los sistemas de ecuaciones diferenciales pueden resolverse como una unidad entera, combinando y eliminando funciones involucradas en variables algebraicas.

Los métodos para resolver ecuaciones diferenciales varían de acuerdo al tipo de ecuación que se resuelva. Algunas ecuaciones diferenciales simples pueden ser separadas en componentes diferencial y no diferencial. Ambos miembros de la ecuación se integran para hallar la solución. Para algunas ecuaciones diferenciales, una más simple ecuación relacionada pude ser resuelta corrigiendo los términos para el caso más complejo. Todas las ecuaciones diferenciales se pueden resolver con series polinomiales, la solución polinomial se conoce como el método de Frobenio.

Para otras ecuaciones diferenciales que se usan en problemas prácticos, se pueden proveer de soluciones numéricas en las cuales se examina el comportamiento de las ecuaciones por incrementos pequeños. Al venir las computadoras, el trabajo y método para resolver las ecuaciones se hizo más sencillo que cuando se hacía con métodos humanos.

Los cálculos numéricos se usan a menudo cuando la ecuación ha sido separada y el resultado total es imposible de resolver en forma cerrada.

Para obtener soluciones exactas con ecuaciones diferenciales, se debe poseer alguna información acerca del comportamiento específico de la ecuación. Generalmente hay una familia de soluciones con las cuales podría resolverse una ecuación diferencial, variando por una o más constantes, dependiendo del orden de la ecuación. De acuerdo a los valores del problema, la persona que resuelva la ecuación encontrará de acuerdo al comportamiento de la función solución que esta tendrá más de una variable. En ningún caso, el número de parámetros específicos podrá ser igual al orden de la ecuación; entonces se examina algebraicamente la familia de ecuaciones para determinar los valores de las constantes de la solución.

Hay muchas ecuaciones diferenciales conocidas de las que ya se sabe su solución; en este caso solo se da la forma conocida de la misma.

El movimiento de las olas en cierto medio, el movimiento oscilatorio simple y el movimiento de un golpeteo constante y estructurado (como el golpe de ariete), son todas expresiones familiares que se representan con ecuaciones diferenciales ya resueltas, y la aplicación de las ecuaciones a estas situaciones solo requiere un conocimiento simple de los valores de las condiciones iniciales. La mayoría de los problemas físicos traen la solución con una ecuación diferencial en algún punto. Hay, de la misma forma, esencialmente *quantums* físicos y clásicos tan bien como algunos rangos de reacción química y muchas fórmulas usadas en ingeniería química, eléctrica, mecánica y medio ambiental.

Por otro lado, un buen número de las leyes generales de la naturaleza, es decir, químicas, biológicas, ecológicas, astronómicas, geográficas, etc, poseen su expresión más natural y lógica en el lenguaje de las ecuaciones diferenciales. Por supuesto, hay infinitas aplicaciones en matemáticas propiamente dichas, sobre todo en geometría, asimismo en economía y en otros campos de las ciencias aplicadas.

Es relativamente sencillo comprender cual es la razón de esta amplia gama de aplicaciones, ya que si y = f (x) como función dada, su derivada dy/dx, se puede interpretar como el índice o razón de cambio y con respecto a x.

En cualquier proceso natural y/o social, las razones de cambio y las variables se relacionan entre sí por medio de los principios fundamentales de los que se rige aquel. El resultado en símbolos matemáticos es muy frecuentemente una ecuación diferencial.

De acuerdo a Simmons, esto se aprecia en el siguiente ejemplo:

"Según la Segunda Ley del Movimiento de Newton, la aceleración a de un cuerpo de masa m es proporcional a la fuerza total F que actúa sobre él, con 1/m como constante de proporcionalidad. De este modo tenemos que a =F/m, o bien ma = F.

Por ejemplo supongamos que un cuerpo de masa m cae libremente tan solo bajo la acción de la gravedad. En este caso, la única fuerza que actúa sobre el cuerpo es mg, donde g es la aceleración producida por la gravedad. Si y es la distancia hacia abajo del cuerpo, a partir de alguna altura dada fija, entonces su aceleración será d2y/dt2 y la ecuación anterior se convertirá en

m d2t/dt2 = mg o d2y/dt2 = g

Si modificamos esta situación y suponemos que el aire ejerce una fuerza de resistencia proporcional a la velocidad, entonces la fuerza total que se ejerce sobre el cuerpo será mg – k (dy/dt) y la primera md2y/dt2 = mg – k dy/dt, y entonces las tres ecuaciones anteriores son las ecuaciones diferenciales que expresan los atributos esenciales del proceso físico que se está considerando" (Simmons, 1979: 17).

Normalmente, la solución de una ecuación algebraica es un número, pero la solución de una ecuación diferencial es una función.

Ejemplo:

Las soluciones a una ecuación diferencial como

dy/dx = 3x2 -2x

Son todas las expresiones de y que satisfagan la ecuación

(3x2 – 2x) dx = x3 – x2 + C2

y + C1 = x3 – x2 + C2

y = x3 – x2 + C2 – C1

y = x3 – x2 + C

Siendo esta última la solución general a la ecuación diferencial anterior.

Ejemplo Práctico:

La población P de un gran nicho de pájaros, crece exponencialmente de acuerdo a la ecuación dp/dx = 20 e0.05x; donde x es el tiempo en años

Hallar P en términos de x si eran 20 pájaros inicialmente.

P = 20 e 0.05x dx = 20/0.05 e 0.05x + C = 400 e 0.05x + C

Como P es 20 cuando x = 0

20 = 400 e 0 + C

C = -380

P = 400 e 0.05x – 380

(Greenwell, et al, 2003 : 603-605).

Enseguida presentamos otros ejemplos de ecuaciones diferenciales:

dy/dt = -ky ---------------------------- 1

md2y/dt2 = -ky------------------------- 2 dy/dx + 2xy = e –x2----------------------- 3

d2y/dx2 – 5 dy/dx +6y = 0--------------- 4

(1 –x2) d2y/dx2 – 2x dy/dx + p (p +1) y = 0 --------5

X2 d2y/dx2 * x dy/dx + (x2 _ p2) y = 0--------------6

La variable dependiente en las ecuaciones anteriores en y, y la variable independiente es t o x; las literales k, m y p son constantes.

Una ecuación diferencial ordinaria es aquella función que solo tiene una variable independiente, por lo que todas las derivadas que aparecen en ella son ordinarias.

Todas las ecuaciones del ejemplo de la Segunda Ley de Newton del movimiento son ordinarias.

Las ecuaciones 5 y 6 son conocidas como ecuación de Legendre y ecuación de Bessel respectivamente” (Simmons, 1979 : 18).

Bibliografía

- Barnett Raymond A., Ziegler Micheal R and Byleen Karl E (2000), Applied Calculus, Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA, 852 p.
- Courant y Robbins (2002), ¿Qué son la matemáticas?, Primera Edición en Español, Martín Manrique Manssur (trad), Fondo de Cultura Económica, México, D.F., 622 p.
- Greenwell Raymond, Ritchey Nathan and Lial Margaret (2003), Calculus with Aplications for the Life Sciences, Adiós-Wiley, Boston, USA,767 p.
- Simmons, George F (1979), Ecuaciones Diferenciales, Agustín Conti (trad), Libros MacGraw-Hill de México, S.A. de C.V., Naucalpan de Juárez, Edo de Méx.., 1979, 522 p.
- Salas, Hille and Etgen (2003), Claculus, John Wiley & Sons Inc, New York, NY, USA, 1140 p.
- Larson, Hostetler and Edwards (2003), Calculus of a single variable, Third Edition, Houghton Mifflin Company, Boston, MA, USA, 713 P.
- Goldstein, Lay and Schneider (2004), Calculus & its applications, Tenth edition, Pearson Education Inc,Upper Saddle River, NJ, USA, 653 p.
- Waner and Costenoble (2004), Applied Calculus, Thomson Brooks/Cole, Belmont, Cal., USA, 572 p.